Profesor:
Ricardo Espino L.

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

PITAGORAS
ACADEMIA

SISTEMAS DE ECUACIONES

1.-Definición

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones en el cual el objetivo es encontrar los valores de variables deconocidas denominadas incógnitas.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

Los valores que satisfacen a este sistema son:

Representación:

$x=3 \quad \wedge \quad y=1 \longrightarrow (3;1)$

ya que $3+1=4$ *y además* $3^2+1^2=10$

también cumplen:

$x=1 \quad \wedge \quad y=3 \longrightarrow (1;3)$

ya que $1+3=4$ *y además* $1^2+3^2=10$

$$\therefore C.S.=\{(3;1),(1;3)\}$$

2. – SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es aquel sistema en el cual todas las ecuaciones son de primer grado

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tress incógnitas

Observación:

Si un sistema de ecuaciones lineales contiene menos ecuaciones que incógnitas entonces:

El sistema tendrá infinitas soluciones es decir será indeterminado

Pero que un sistema de ec. lineales tenga igual cantidad de ecuaciones que incógnitas o más inclusive, no signfica que no pueda tener infinitas soluciones también

$3.-$*Métodos de solución*

Si bien hay diversos métodos para resolver sistemas lineales, principalmente utilizaremos solo 2:

3. 1. *Método de eliminación de variables*

También conocido como el método de reducción o método de Gauss
consiste en la eliminación de variables generada por sumas o restas de ecuaciones

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 3x-2y=17 \end{cases}$$

Multiplicamos a la primera ecuación por 2.

Sumamos este resultado con la segunda ecuación

$$\begin{array}{r} 2x+2y=8 \\ 3x-2y=17 \\ \hline 5x=25 \\ x=5 \end{array} \quad +$$

Ya que sabemos que $x=5$ *podemos reemplazar*:

$$x+y=4 \quad \rightarrow \quad 5+y=4 \quad \rightarrow \quad y=-1$$

$$\therefore \boldsymbol{C.S.=\{(5;-1)\}}$$

$Ejemplo2:$

$Resolver\ el\ siguiente\ sistema:$

$$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+5y=13 \end{cases}$$

$Multiplicamos\ a\ la\ primera\ ecuación\ por\ 3.$

$Multiplicamos\ a\ la\ segunda\ ecuación\ por\ 2.$

$$\begin{array}{r} 6x+9y=27 \\ 6x+10y=26 \\ \hline -y=1 \\ y=-1 \end{array} \quad -$$

$Ya\ que\ sabemos\ que\ y=-1\ podemos\ reemplazar:$

$$2x+3y=9 \quad \rightarrow \quad 2x-3=9 \quad \rightarrow \quad x=6$$

$$\therefore \boldsymbol{C.S.=\{(6;-1)\}}$$

$Ejemplo3:$

$Resolver\ el\ siguiente\ sistema:$

$$\begin{cases} x-y+z=6 \\ 2x+y+z=7 \\ 3x+2y-z=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones para eliminar z

$$-x - 2y = -1$$

Multiplicamos a la primera ecuación por 5.

$$-5x - 10y = -5$$

$$5x + 3y = 12$$

$$-7y = 7 \qquad y = -1$$

Sumamos ambas ecuaciones para eliminar z

$$5x + 3y = 12$$

Ya que sabemos que $y = -1$ *reemplazamos para hallar x*

$$5x + 3y = 12 \quad \rightarrow 5x - 3 = 12 \quad \rightarrow x = 3$$

Ya que sabemos que $x = 3$, $y = -1$ *reemplazamos para hallar z*

$$x - y + z = 6 \quad \rightarrow 3 - (-1) + z = 6 \quad \rightarrow z = 2$$

$$\therefore \boldsymbol{C.S. = \{(3; -1; 2)\}}$$

Ejemplo2:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 3 \\ x + y - z = 4 \\ 5x + 2y + z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2x + y + 2z = 3 \\ 2x + 2y - 2z = 8 \quad (x2) \quad + \\ \hline 4x + 3y = 11 \end{array}$$

Sumamos

$$6x + 3y = 21$$

$$\begin{array}{l} 4x + 3y = 11 \\ 6x + 3y = 21 \quad - \\ \hline -2x = -10 \qquad x = 5 \end{array}$$

Ya que sabemos que $x = 5$ *reemplazamos para hallar* y

$$4x + 3y = 11 \quad \rightarrow 20 + 3y = 11 \quad \rightarrow y = -3$$

Ya que sabemos que $x = 5$, $y = -3$ *reemplazamos para hallar* z

$$x + y - z = 4 \quad \rightarrow 5 - 3 - z = 4 \quad \rightarrow z = -2$$

$$\therefore \boldsymbol{C.S. = \{(5; -3; -2)\}}$$

Regla de Cramer

$\underline{1.-Determinante\ del\ sistema:\ \Delta s}$

$Determinante\ de\ la\ matriz\ cuyos\ elementos\ son\ los\ coeficientes\ de\ las\ incógnitas\ del\ sistema$

$\underline{2.-Determinante\ de\ una\ variable:\ \Delta x\ ,\Delta y}$

$Determinante\ de\ la\ matriz\ que\ se\ genera\ al\ sustituir\ los\ coeficientes\ de\ la\ incógnita$
$con\ los\ resultados\ del\ sistema$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$1.-$*Determinante del sistema:* Δs

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 3.3 = 1$$

$2.-$*Determinante de una variable:* Δx , Δy

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 9.5 - 13.3 = 6$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 2.13 - 3.9 = -1$$

Finalmente

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta s} \qquad x = \frac{6}{1} = 6 \qquad y = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\therefore \boldsymbol{C.S. = \{(6; -1)\}}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$$

$1.-$*Determinante del sistema*: Δs

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 2.2 = 11$$

$2.-$*Determinante de una variable*: Δx , Δy

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 4.3 - (-5).2 = 22$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5.(-5) - 2.4 = -33$$

Finalmente

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta s} \qquad x = \frac{22}{11} = 2 \qquad y = \frac{-33}{11} = -3$$

$$\therefore \boldsymbol{C.S. = \{(2; -3)\}}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

$1.-$*Determinante del sistema*: Δs

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}$$

$3 \quad 2 \quad 2 \quad -1 \quad -3 \quad 4$

$$\Delta s = (-1 - 3 + 4) - (3 + 2 + 2) = -7$$

$2.-$*Determinante de* x: Δx

$$\left|\begin{array}{ccc} 6 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 6 & -1 \\ 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{array}$$

$5 \quad 12 \quad 7 \quad -6 \quad -5 \quad 14$

$$\Delta x = (-6 - 5 + 14) - (5 + 12 + 7) = -21$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad x = \frac{-21}{-7} = 3$$

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

$\underline{2.-Determinante\ de\ y:\ \Delta y}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$21 \quad 5 \quad -12 \qquad -7 \quad 18 \quad 10$

$$\Delta y = (-7 + 18 + 10) - (21 + 5 - 12) = 7$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} \qquad y = \frac{7}{-7} = -1$$

$\underline{3.-Determinante\ de\ z:\ \Delta z}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$18 \quad 14 \quad -10 \qquad 5 \quad -21 \quad 24$

$$\Delta y = (5 - 21 + 24) - (18 + 14 - 10) = -14$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta s} \qquad z = \frac{-14}{-7} = 2$$

OBSERVACIÓN

Calcule el C.S. de cada uno de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ x+y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ 4x-2y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4y=11 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Restando $\quad -3y=-3$

$$y=1$$

$$x+y=6$$

$$x+1=6$$

$$x=5$$

$$C.S.=\{(5;1)\}$$

SOLUCIÓN

Multiplicando por 2 a la primera ecuación

$$4x-2y=10$$

Se encuentra la misma segunda ecuación

Restando se obtiene $0=0$

Por lo tanto las soluciones son todas aquellas que cumplen $2x-y=5$

$$C.S.=\{(x;y)\,, \quad 2x-y=5\}$$

SOLUCIÓN

Multiplicando por 2 a la primera ecuación

$$2x+4y=10$$

Restando se obtiene $0=-1$

Lo cual es absurdo y

por lo tanto no habrán soluciones

$$C.S.=\{\,\}$$

$$C.S.=\emptyset$$

En base a esto se hace la siguiente clasificación de los sistemas ***según el C.S.***

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

¿existen soluciones?

sí | *no*

SISTEMA COMPATIBLE

¿solución es única o hay infinitas soluciones?

SISTEMA INCOMPATIBLE

Solución única → **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**

Infinitas soluciones → **SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO**

Compatible y consistente son sinónimos* *

***Propiedad*:**

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO $\Delta s \neq 0$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO $\Delta s = 0 \quad \wedge \ \Delta x = 0 \quad \wedge \ \ \Delta y = 0 \quad \wedge \quad \ \Delta z = 0$

SISTEMA INCOMPATIBLE $\Delta s = 0 \quad \wedge \ \Delta x \neq 0 \quad \wedge \ \ \Delta y \neq 0 \quad \wedge \quad \ \Delta z \neq 0$

Propiedad:

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO $\Delta s \neq 0$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO $\Delta s = 0 \quad \wedge \ \Delta x = 0 \quad \wedge \ \ \Delta y = 0 \quad \wedge \quad \Delta z = 0$

SISTEMA INCOMPATIBLE $\Delta s = 0 \quad \wedge \ \Delta x \neq 0 \quad \wedge \ \ \Delta y \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta z \neq 0$

10. Determine los valores de a para los cuales el sistema

$$x + ay + 3z = 14$$

$$2x + y + z = a + 2$$

$$x - 3y + z = -a$$

tiene solución única.

A) 1 y 17 B) – 17 C) □

D) □ – {– 17} E) □ – {17}

$$Para\ que\ el\ sistema\ tenga\ solución\ única, se\ debe\ cumplir\ \Delta s \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$-a - 17 \neq 0$$

$$-17 \neq a$$

$$a \in \mathbb{R} - \{-17\}$$

PITAGORAS ACADEMIA

13. El sistema

$\lambda x + y = 0$

$\lambda x + z = 1$

$\lambda z + x = \lambda$

tiene infinitas soluciones, una de las cuales es (x_o, y_o, z_o) y cumple que $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 66$. **Determine el valor de y_o ($y_o \in$ □).**

A) – 5 **B) 2** **C) 4**

D) 5 **E) 6**

$$\Delta s = 0 \qquad \Delta x = 0 \qquad \Delta y = 0 \qquad \Delta z = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$1 - \lambda^2 = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = -1}$$

$$\color{red}{\boldsymbol{\lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = -1}}$$

$$x_0^2 + y_o^2 + z_0^2 = 66$$

$$\lambda x + y = 0 \qquad x_0$$

$$\lambda x + z = 1 \qquad y_0 = -\lambda x_0$$

$$\lambda z + x = \lambda \qquad z_0 = 1 - \lambda x_0$$

$$x_0^2 + (-\lambda x_0)^2 + (1 - \lambda x_0)^2 = 66$$

$$x_0^2 + \lambda^2 x_0^2 + 1 - 2\lambda x_0 + \lambda^2 x_0^2 = 66$$

$$x_0^2 + x_0^2 + 1 - 2\lambda x_0 + x_0^2 = 66$$

$$3x_0^2 - 2\lambda x_0 - 65 = 0 \qquad 3x_0^2 - 2\lambda x_0 - 65 = 0$$

$$cuando\ \lambda = 1 \quad se\ obtiene\ que\ x_0 = 5 \qquad cuando\ \lambda = -1 \quad se\ obtiene\ que\ x_0 = -5$$

$$y_0 = -5 \qquad y_0 = -5$$

$$z_0 = -4 \qquad z_0 = -4$$

14. ¿Para qué valor de n; el sistema

$$\begin{cases} nx+y+z=1 \\ x+ny+z=1 \\ x+y+nz=-2 \end{cases}$$

; es inconsistente?

A) n = – 2 B) n = – 1 C) n = 1

D) n = 2 E) n = 3

$$\Delta s=0 \quad \Delta x\neq 0 \quad \Delta y\neq 0 \quad \Delta z\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$n^3-3n+2=0$$

$$(n-1)(n^2+n-2)=0$$

$$(n-1)^2(n+2)=0$$

$$n=1 \quad \vee \quad n=-2$$

$$n=1 \qquad n=-2$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$$

es incompatible *es compatible indeterminado*

Hemos encontrado un sistema en el cual, todos los determinantes son 0
y sin embargo uno es incompatible y otro es compatible indeterminado

$Sistema\ de\ ecuaciones\ lineales$

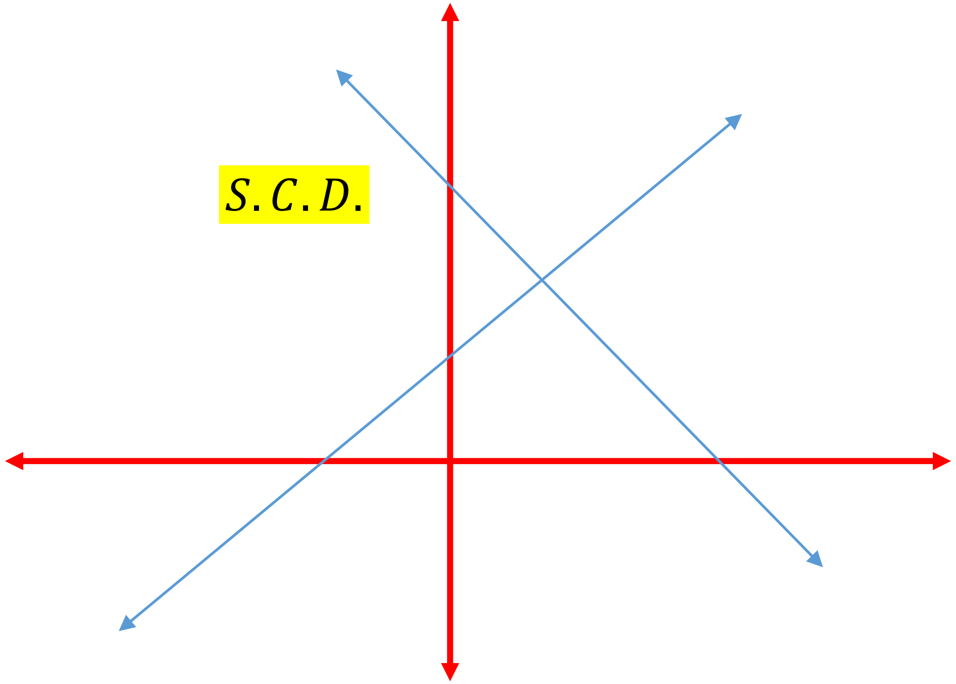
$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

$Solo\ lo\ podemos\ aplicar\ si\ abmncp \neq 0$

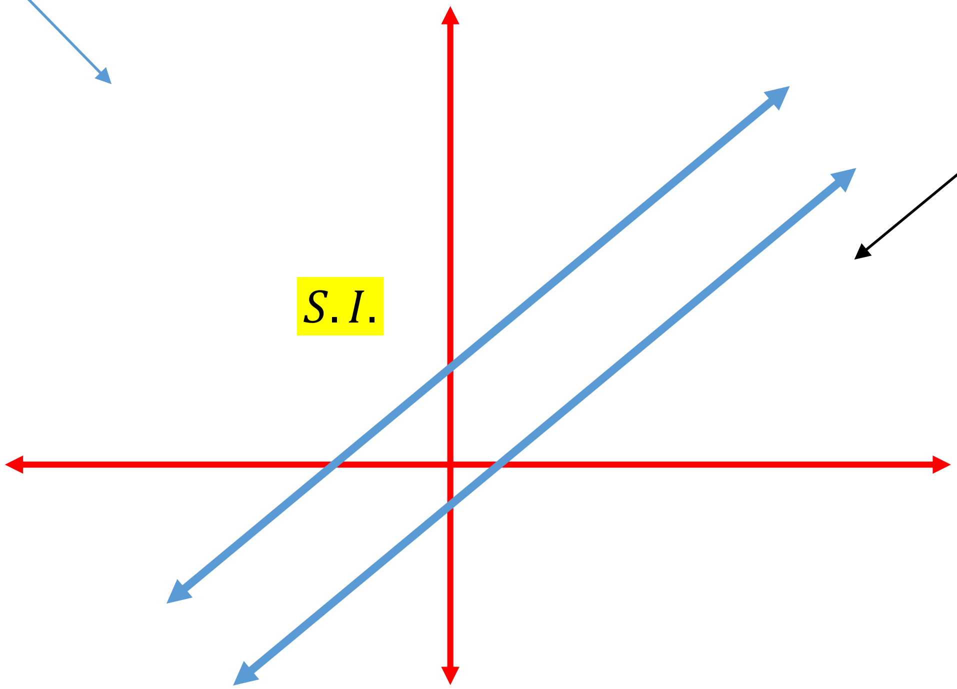
$Sistema\ compatible\ determinado$: $\frac{a}{m} \neq \frac{b}{n}$

$Sistema\ compatible\ indeterminado$: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

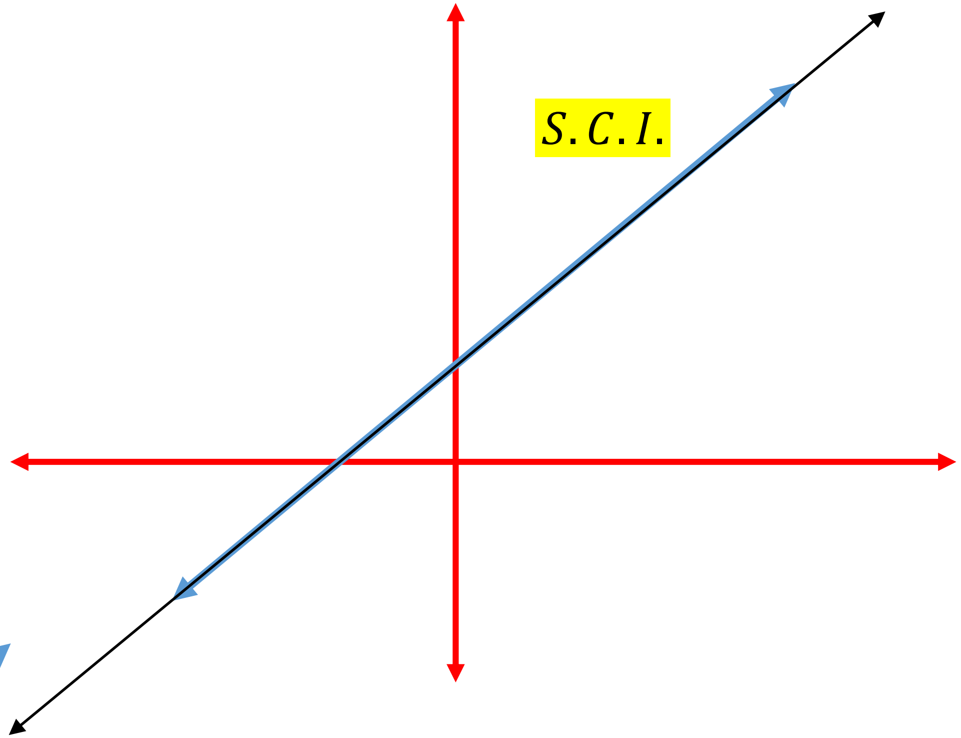
$Sistema\ incompatible$: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq \frac{c}{p}$



$S.C.D.$



$S.I.$



$S.C.I.$